La distribution des nombres premiers

Bruno Winckler

17 juin 2008

Table des matières

Introduction

Si on note $\pi(x)$ le cardinal de $\{p \in \mathbb{P} \quad | p \leq x\}$, où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, on a alors :

$$\pi(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$$

Ce résultat, qu'on cite comme étant le *théorème des nombres premiers*, a été démontré dans un premier temps en 1896 et nécessitait des outils d'analyse complexe. Depuis, des preuves dites « élémentaires », c'est-à-dire n'ayant pas recours à l'analyse complexe, sont parues, et afin d'en rester aux outils d'un élève de classe de Spéciales, c'est une preuve de cette nature qui est ici proposée.

Dans ce TIPE, p désigne toujours un nombre premier, et dans cet esprit

$$\sum_{p \leq x} a_p = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathbb{P}}} a_n$$

de même pour les notations analogues.

1 Résultats classiques

1.1 Introduction des fonctions arithmétiques

On introduit ici des fonctions arithmétiques (c'est-à-dire $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$) qui permettront d'établir des identités utiles pour la suite. Afin de simplifier l'écriture des formules, on note 1 la fonction arithmétique constante égale à 1, L la fonction logarithme népérien et e_r la fonction qui vérifie $e_r(n) = \delta_{rn}$ où δ_{rn} est le symbole de Kronecker. De plus, on utilisera les deux fonctions suivantes :

Définition 1.1.1 *(Möbius) On note $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & si \quad n = p_1 \cdots p_r \\ 0 \quad si & p^k | n \quad (k \geq 2) \end{cases}$$

Définition 1.1.2 *(von Mangoldt) On note $\Lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & si \quad n = p^k (k \geq 1) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

A chaque fonction arithmétique on associe $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ la fonction sommatoire liée à f, définie sur $[1, +\infty[$. En particulier les fonctions définies par $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ et $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ revêtiront un intérêt particulier.

1.2 Produit de convolution, identités usuelles

Plusieurs relations entre les fonctions arithmétiques s'expriment mieux sous forme de *produits de convolution.* Il s'agit d'une opération qui associe à deux fonctions arithmétique une nouvelle, notée $f * g$, définie comme suit :

Définition 1.2.1 *(Produit de convolution)* $\forall n \geq 1 \qquad (f * g)(n) = \sum_{ij=n} f(i)g(j)$

Dans le cadre de notre TIPE, on a besoin des trois identités suivantes :

Proposition 1.2.1 *On a, avec les notations précédentes :*

$$f * e_1 = f \ \textit{(élément neutre pour } *) \tag{1}$$

$$1 * \mu = e_1 \ (\mu \textit{ est l'inverse de 1 pour } *) \tag{2}$$

$$\Lambda * 1 = L \tag{3}$$

Ces identités se vérifient aisément à partir des définitions. On peut remarquer cette proposition qui résume les propriétés élémentaires de la convolution :

Proposition 1.2.2 *L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ muni des lois $+$ et $*$ forme un anneau commutatif unitaire, d'élément neutre e_1.*

En particulier, $*$ est associative, ce qui permet d'écrire, à partir d'une égalité de la forme $f * 1 = g$, que $f = g * \mu$. Ce qui donne, concrètement :

Proposition 1.2.3 *Si $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, alors $f(n) = \sum_{d|n} g(n/d)\mu(d)$*

1.3 Propositions issues de la convolution

On peut déduire des identités très générales sur les fonctions arithmétiques. Par exemple, l'identité suivante permet de dévoiler de nombreux liens nouveaux entre les fonctions ici étudiées :

Proposition 1.3.1 $L \cdot (f * g) = (L \cdot f) * g + f * (L \cdot g)$

Ceci se déduit aisément de la propriété $L(n/d) = L(n) - L(d)$. On peut également étudier la somme d'un produit de convolution, ce qui nous sera utile par la suite :

Proposition 1.3.2 *Si on note F et G les fonctions sommatoires liées à f et g, alors :*

$$\sum_{n \leq x} (f * g)(n) = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) g(n) = \sum_{n \leq x} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right)$$

Par exemple, $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, vérifie d'après (1.3.2) :

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} (\Lambda * 1)(n) = \sum_{n \leq x} \ln(n) = x\ln(x) - x + O(\ln x) \tag{4}$$

Une égalité dans le même esprit permet d'utiliser à la fois F et G :

Proposition 1.3.3 *(Méthode de Dirichlet) Soit $1 < y < x$. Alors*

$$\sum_{n \leq x} (f * g)(n) = \sum_{n \leq y} F\left(\frac{x}{n}\right) g(n) + \sum_{m \leq x/y} f(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right) G(y)$$

Une application de ce résultat qui nous servira par la suite est donnée en prenant $f = g = 1$ ($(1 * 1)(n)$ est le nombre de diviseurs de n), et $y = \sqrt{x}$, on obtient :

$$\sum_{n \leq x} (1 * 1)(n) = x\ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \tag{5}$$

où γ est la constante d'Euler.

2 Une première approche du TNP

En vérité, la fonction fondamentale ici ne sera pas π mais ψ : Il est en pratique plus "simple" d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique de ψ, ne serait-ce qu'à l'aide des identités permises par la convolution. Une autre raison sur laquelle on ne s'étendra pas est que $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, et connaître le comportement de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ nous renseigne sur celui de $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Il est temps d'établir le lien entre π et ψ.

2.1 Lien entre π et ψ

On introduit $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$. θ est assez proche de ψ, puisque

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \ln(p) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \cdots + \theta(x^{1/m})$$

où $m = [\ln(x)/\ln(2)]$. De $0 \leq \theta(x^{1/a}) \leq x^{1/a}\ln(x)$, on déduit

$$\psi(x) - \theta(x) = O(x^{1/2}\ln(x))$$

Comme $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \sum_{2\leq n\leq x} \frac{\theta(n)-\theta(n-1)}{\ln(n)}$, on trouve :

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} = \sum_{2\leq n\leq x} (\psi(n) - n)\left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) + \frac{\psi(x)-[x]}{\ln([x+1])} + O\left(\frac{x}{\ln(x)^{3/2}}\right) \tag{6}$$

Le lien entre $\psi(x) - x$ et $\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$ est alors mis en évidence. En particulier, si $\psi(x) - x = o(x)$, on trouve $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$. L'objet du TIPE est donc, à présent, de démontrer que

$$\psi(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$$

2.2 Construction d'une fonction arithmétique

Pour estimer ψ, une première idée serait de partir de (3) : $\Lambda = L * \mu$. Ainsi, $\psi(x) = \sum_{n\leq x}(L*\mu)(n)$. Cependant cette égalité ne permet pas d'avoir de résultats satisfaisants sur ψ, car les comportements de μ et de M sont pour l'instant peu connus. On introduit alors une fonction arithmétique ν, dont le rôle est proche de celui d'inversion de μ. On a $\Lambda*1*\nu = L*\nu$. Alors, en notant $\chi(x) = \sum_{n\leq x}(1*\nu)(n) = \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]\nu(n)$, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{n\leq x} \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)}_{\text{encadre avec } \psi} = \underbrace{\sum_{n\leq x}(L*\nu)(n)}_{\text{se calcule}}$$

Plus précisément :

$$\sum_{n\leq x}(L*\nu)(n) = (x\ln(x) - x)\sum_{n\leq x}\frac{\nu(n)}{n} - x\sum_{n\leq x}\nu(n)\frac{\ln(n)}{n} + O(\ln(x))$$

2.3 Estimation de ψ

Pour avoir le meilleur résultat possible, on doit avoir :

- $\sum_{n\leq x}\frac{\nu(n)}{n} = 0$ à partir d'un certain x. Dans tel cas,

$$\sum_{n\leq x}\chi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = O(x)$$

.

- $\sum_{n\leq x}\nu(n)\frac{\ln(n)}{n} = B$ (constante) à partir d'un certain x. Alors,

$$\sum_{n\leq x}\chi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = -x\cdot B + O(\ln(x))$$

- χ proche de 1 pour un intervalle de longueur "raisonnable". Alors, $\sum_{n\leq x}\chi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)$ est une bonne approximation de $\sum_{n\leq x}\Lambda(n) = \psi(x)$.

Exemple : Si $\nu = e_1 - 2e_2$, alors $\chi(x) = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$, valant 1 si $[x]$ est impair, 0 sinon. Alors $\sum_{n\leq x}\chi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = x\ln(2) + O(\ln(x))$, et

$$\sum_{n\leq x}\chi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)\left\{\begin{array}{c} \leq \sum_{n\leq x}\Lambda(n) = \psi(x) \\ \geq \sum_{x/2<n\leq x}\Lambda(n) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\end{array}\right\}$$

Alors on trouve :

$$x\ln(2) \leq \psi(x) \leq 2x\ln(2) + O(\ln(x)^2)$$

et, grâce à (6), $0,22 \leq \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \leq 1,78$. Le tableau suivant donne d'autres valeurs selon le choix de ν, et les graphes de χ correspondant sont en appendice.

ν	$-B$	$\lvert\psi(x)-x\rvert \leq$	$\leq \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$	$\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \leq$
$e_1 - 2e_2$	$\ln(2) \simeq 0,62$	0,39x	0,22	1,78
$e_1 - 2e_2 + 3e_3 - 4e_4$	0,98	0.96x	-0,92	2,92
$\sum_{k=0}^{2N}(-1)^k(k+1)e_{k+1}{}^1$	$1 <$	$x <$	< 0	< 3
$e_1 - e_2 - e_3 - e_6$	1,01	0,5x	0	2
$e_1 - e_2 - e_4 - e_7 - e_{14} - e_{28}$	1,28	0,69x	-0,38	2,38
$2e_1 - \sum_{d\mid 496} e_d$	1,38	0,83x	-0,66	2,66
$e_1 - e_2 - e_3 - e_6 + e_{36} - 36e_{1296}$	1,11	0,97x	-0,94	2,94
$e_1 - e_2 - e_3 - e_5 - e_6 + 6e_{30}$	0,65	2,90x	-4,80	6,80

$\nu = e_1 - e_2 - e_3 - e_5 + e_{30}$ (choix de Chebyshev) donne $B = 0,92$ et

$$Bx \leq \psi(x) \leq \frac{6B}{5}x + O(\ln(x)^2)$$

Alors :

$$0,89 \leq \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \leq 1,11$$

Bien que ces estimations ne donnent pas le TNP, on déduit de ces encadrements que $\psi(x) = O(x)$, et le postulat de Bertrand pour des valeurs de x assez grandes : $\pi(2x) - \pi(x) \geq 1$.

3 Démonstration du TNP

3.1 La démonstration du TNP : esquisse

Dans cette partie, il est indispensable de se renseigner sur le comportement de μ et M, pour obtenir un résultat assez fin qui aboutit au TNP. On a clairement $M(x) = O(x)$, mais quelques tables de valeurs permettent de conjecturer $M(x) = o(x)$. Voyons comment, sous cette hypothèse, on déduit le TNP :

Proposition 3.1.1 *Soit $F(x) = \sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)$ une fonction qui peut s'exprimer comme différence de deux fonctions positives croissantes. Si*

$$F(x) = Ax\ln(x)^2 + Bx\ln(x) + Cx + O(x^{1-\beta})$$

avec $\beta \in [0,1[$, alors

$$f(x) = 2Ax\ln(x) + (B - 2A\gamma)x + o(x)$$

On a d'ailleurs ce résultat avec $O(x)$ dans l'estimation de f, sans hypothèse sur F et M. La démonstration résulte de $f(x) = \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n)$.

Ce théorème appliqué à $F(x) = \ln([x]!) = \sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, (4) donne $\psi(x) = x + o(x)$ et le TNP est démontré. Il s'agit donc de vérifier l'hypothèse $M(x) = o(x)$. On procède en trois étapes :

– Tout d'abord, on montre que M vérifie une inégalité de la forme

$$\left|M(x)\ln(x)^2\right| \leq \sum_{n\leq x} c(n)\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O(x\ln(x)) \tag{7}$$

où $(c(n))_{n\geq 1}$ est une suite dont le comportement est connu.

– En effet, on montre, grâce aux produits de convolution, que

$$\sum_{n\leq x} c(n) = \sum_{p\leq x}\ln(p)^2 + \sum_{pq\leq x}\ln(p)\ln(q) = 2x\cdot\ln(x) + O(x)$$

Ce qui donne, grâce à une transformation d'Abel, le comportement asymptotique de $\sum_{n\leq x}\frac{c(n)}{n}$ (Inégalité de Selberg).

– Utiliser cette inégalité dans (7) ne permet pas d'avoir $M(x) = o(x)$, mais l'estimation triviale $M(x) = O(x)$. On a alors besoin d'un lemme technique, qui renseigne de manière plus fine sur les variations de M.

3.2 La formule de Selberg

Le point de départ est la proposition (1.3.1) : comme $L\cdot e_1 = 0 = L\cdot(1*\mu)$, on obtient $L\cdot\mu = -\Lambda*\mu$. De la même manière, on obtient

$$L^2\mu = \underbrace{(\Lambda*\Lambda - L\Lambda)}_{=b}*\mu, \qquad L^2*\mu = \underbrace{L\Lambda + \Lambda*\Lambda}_{=c}$$

En sommant la première égalité et avec une transformation d'Abel, on a

$$M(x)\ln(x)^2 - 2\int_1^x M(u)\frac{\ln(u)}{u}du = \sum_{n\leq x}(b*\mu)(n) = \sum_{n\leq x} b(n)M\left(\frac{x}{n}\right)$$

$|M(u)| \leq u$ et $|b(n)| \leq c(n)$ fournissent (7).

Une méthode pour estimer $\sum_{n\leq x} c(n) = \sum_{n\leq x}(L^2*\mu)(n)$ procède comme suit : on considère g un élément de l'algèbre engendrée par 1, et $G(x) = \sum_{n\leq x} g(n)$. On essaye alors d'obtenir, par un bon choix de g :

$$\sum_{n\leq x}\left(\sum_{m\leq x/n} L^2(m) - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)\mu(n) = O(x)$$

La méthode de Dirichlet fournit :

$$\begin{array}{rcccccccc}
a\sum_{n\leq x}1(n) & = & & & & & a\cdot x & + & O(1)\\
b\sum_{n\leq x}(1*1)(n) & = & & & b\cdot x\ln(x) & + & b(2\gamma-1)\cdot x & + & O(\sqrt{x})\\
c\sum_{n\leq x}(1*1*1)(n) & = & \frac{c}{2}\cdot x\ln(x)^2 & + & c_1\cdot x\ln(x) & + & c_2\cdot x & + & O(x^{2/3}\ln(x))\\
\sum_{n\leq x}L^2(n) & = & x\ln(x)^2 & - & 2\cdot x\ln(x) & + & 2\cdot x & + & O(\ln(x)^2)
\end{array}$$

On choisit alors a, b, c pour tout annuler. Enfin, comme

$$\sum_{n\leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n) = \left(\sum_{n\leq x} 2\cdot(1*1)(n) + a\right) + b = 2x\ln(x) + O(x)$$

on obtient le résultat attendu. En outre,

$$\sum_{n\leq x}\frac{c(n)}{n} = \ln(x)^2 - 2\gamma\ln(x) + O(1) \tag{8}$$

3.3 La fonction de Mertens

Le lemme utilisé pour montrer $M(x) = o(x)$ s'énonce comme suit :

Proposition 3.3.1 *Il existe $K > 0$ tel que : pour $\Delta > 1$ fixé, et $\delta \in [\frac{1}{\Delta}, 1]$, alors tout intervalle $I = [\rho, \rho e^{\Delta}[$ où $\rho \geq e^{\Delta}$ contient $i = [\sigma, \sigma e^{\delta}[$ pour lequel :*

$$\max_{u \in i} \left| \frac{M(u)}{u} \right| \leq K\delta$$

On montre par l'absurde qu'un certain u_0 vérifie l'inégalité, et tout intervalle $i = [\sigma, \sigma e^{\delta}[$ le contenant convient.

Alors, on partitionne $[1, +\infty[$ à l'aide d'intervalles de la forme $I_n = [e^{n\Delta}, e^{(n+1)\Delta}[$, et on considère $\sum c(n) \left| M\left(\frac{x}{n}\right) \right|$ sur ces différents intervalles. Des calculs techniques (utilisant la formule de Selberg) mènent à :

$$\left| \frac{M(x)}{x} \right| \leq m^*_{\sqrt{N}} \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right) + \frac{K\delta^2}{\Delta} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

où :
- N est l'unique entier tel que $x \in [e^{N\Delta}, e^{(N+1)\Delta}] = I_N$
- $m_n = \max_{u \in I_n} \left| \frac{M(u)}{u} \right|$
- ${m_v}^*$ est la borne supérieure de m_n pour $n \in [v, N[$.

Il en découle

$$\limsup_{n \to \infty} m_n \leq \limsup_{n \to \infty} m_n \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right) + \frac{K\delta^2}{\Delta}$$

Donc $\limsup m_n \leq K\delta$. Comme on peut prendre $\delta = \frac{1}{\Delta}$ aussi petit qu'on veut :

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{M(x)}{x} \right| = 0$$

et on obtient finalement le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)} \qquad \square$$