Convergence d'une suite de la forme $(e^{in\theta})_{n\geq 0}$.

Bruno Winckler

Prérequis :
- topologie de base, classification topologique des sous-groupes de $\mathbb{R}$;
- exponentielle complexe.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs complexes définie, pour tout n entier, par $u_n = \exp(2i\pi n\theta)$, où θ est un réel (modulo $\mathbb{Z}$). La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs sur le cercle unité complexe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Je me pose ici la question de la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Si $\theta = 0 \mod \mathbb{Z}$, alors la suite converge trivialement vers 1. Mais une telle suite ne converge pas toujours, comme on peut s'y attendre : l'exemple $\theta = \frac{1}{2} \mod \mathbb{Z}$ le montre, puisque la suite est périodique, alternant entre les valeurs -1 et 1. Je me propose de prouver ici qu'en fait, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge que pour le cas $\theta = 0 \mod \mathbb{Z}$, et qu'alors, soit la suite est périodique (pour θ rationnel), soit la suite admet tout le cercle comme ensemble de valeurs d'adhérence.

Pour montrer qu'elle diverge, il suffirait de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy, puisque toute suite convergente est de Cauchy. Or, pour $n \geq m \geq 0$, on a :

$$|u_m - u_n| = |1 - u_{n-m}| = |1 - \exp(2i\pi(n-m)\theta|.$$

Si $\theta \neq 0 \mod \mathbb{Z}$, alors prendre $n = m+1$ donne $|u_m - u_n| = |1-\exp(2i\pi\theta)| > 0$, et la définition d'une suite de Cauchy est donc mise en défaut dès qu'on considère $\varepsilon < |1-\exp(2i\pi\theta)|$. Mais on peut démontrer tous les résultats du premier paragraphe avec un seul argument, qui est un argument topologique.

Voici comment procéder : l'ensemble des valeurs de $(u_n)_{n\geq 0}$, noté S, est un sous-groupe de $\mathbb{U}$ pour la loi multiplicative : on a $u_m u_n = u_{m+n}$ pour tout $m, n \geq 0$. Or, on a un isomorphisme continu de groupes entre $\mathbb{U}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: en effet, $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & \exp(2i\pi\theta) \end{cases}$ est un morphisme de groupes surjectif continu, et les théorèmes de factorisation par passage au quotient assurent que φ induit un isomorphisme de groupes continu entre $\mathbb{R}/\ker(\varphi)$ et $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{U}$, donné par $\theta \mod \ker(\varphi) \mapsto \exp(2i\pi\theta)$. Or $\ker(\varphi) = \mathbb{Z}$, comme on le sait bien quand on découvre l'exponentielle complexe. On vérifie sans trop de peine qu'il s'agit en fait d'un homéomorphisme, c'est-à-dire d'inverse continu lui aussi. En particulier, les parties denses se correspondent entre ces deux groupes, en plus des sous-groupes.

Le sous-groupe $\varphi^{-1}(S)$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ égale $\{n\theta \mod \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$. Pour comprendre sa nature topologique, soit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}, a \mapsto a + \mathbb{Z}$ la projection naturelle de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui est continue. D'un point de vue algébrique, elle associe bijectivement les sous-groupes G de $(\mathbb{R}, +)$ contenant $\mathbb{Z}$ et les sous-groupes $G/\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$. On sait démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, soit denses. Ceci permet de classifier tous les sous-groupes de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: soit $G/\mathbb{Z}$ un sous-groupe de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, provenant du sous-groupe G de $\mathbb{R}$. Si G est dense dans $\mathbb{R}$, alors son image $G/\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, par continuité de π. Sinon, G est de la forme $a\mathbb{Z}$, et dire que $a\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{Z}$ revient à dire que 1 appartient $a\mathbb{Z}$, donc que a est un rationnel qu'on peut écrire $\frac{1}{b}$ avec b entier non nul. L'image de $G = \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est $\frac{1}{b}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, de cardinal b. En bref :

Proposition 1 (Sous-groupes de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) *Les sous-groupes de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont soit cycliques, soit denses.*

De quelle classe fait partie $\varphi^{-1}(S)$? Notre démonstration de la proposition montre que les sous-groupes cycliques de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont de la forme $\frac{1}{b}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Comme $\varphi^{-1}(S) = \theta\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, notre sous-groupe $\varphi^{-1}(S)$ est cyclique si, et seulement si $\theta\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \frac{1}{b}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ pour un certain entier non nul b, si et seulement si θ est rationnel (et alors, $\theta \mod \mathbb{Z}$ engendre S).

Cas où θ est rationnel. Dans ce cas, $\varphi^{-1}(S)$ est cyclique, donc S aussi, et il est clair que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est alors périodique, de période le cardinal de S. Une suite périodique ne converge que si elle est constante, donc si le cardinal de S égale 1. Ceci correspond au cas où $\theta = 0 \mod \mathbb{Z}$, ce qu'on avait déjà remarqué en début d'exposé. C'est donc le seul cas où la suite converge. On remarque que l'étude du cas où θ est rationnel aurait pu être traité sans faire appel à ces arguments topologiques. Mais là, on obtient une condition nécessaire et suffisante sur la rationalité de θ.

Cas où θ n'est pas rationnel. Alors $\varphi^{-1}(S)$ est dense dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donc S est dense dans $\mathbb{U}$. Montrons qu'alors, tout point de $\mathbb{U}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$: si $z \in \mathbb{U}$, alors pour tout n entier, l'intersection $B_n = (\mathbb{U} \cap B(z, \frac{1}{n})) \cap S$ est non vide par densité de S, soit donc $u_{\varphi(n)}$ un élément de cette intersection. Je peux même prendre $\varphi(n) > \varphi(n-1)$, car une infinité de valeurs de S est dans B_n. En effet, si on n'avait qu'un nombre fini d'éléments de S dans B_n, soit d la distance minimale entre ces éléments qui sont en nombre fini (donc $d \neq 0$). Alors, toute boule centrée en un élément à équidistance de deux éléments de S, et de rayon $d/2$, contiendrait aucun élément de S, ce qui contredirait sa densité.

Par construction, $|z - u_{\varphi(n)}| < \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, donc z est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. $\square$