Preuve du théorème de Picard

29 octobre 2012

Prérequis :
– notion de revêtement universel, cas des surfaces de Riemann ;
– théorème de Liouville.

Théorème 1 *Toute fonction entière qui évite au moins deux points est constante.*

Preuve : Soient a et b distincts tels que $a, b \notin f(\mathbb{C})$, et $X = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

Le revêtement universel de X est $\mathbb{D}$, en effet X n'est pas compact donc X n'est isomorphe ni à $\mathbb{S}$, ni aux tores de genre 1. Reste à voir que X n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ni à $\mathbb{C}$ privé d'un point.

Par l'absurde, si X est isomorphe à l'une de ces deux surfaces alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. Or $\pi_1(\mathbb{C}) = \{e\}$, $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$ et $\pi_1(X)$ n'est pas isomorphe à ces deux groupes. Donc le revêtement universel de X est bien $\mathbb{D}$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{D} \arrow[d] \\
\mathbb{C} \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Notons $\tilde{f}$ le relevé de f, alors $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ est aussi holomorphe. L'application $\tilde{f}$ est une fonction entière bornée donc, par le théorème de Liouville, $\tilde{f}$ est constante. Donc f est constante aussi. $\square$