

# Preuve du théorème de Picard

29 octobre 2012

## Prérequis :

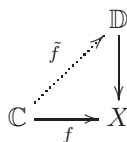
- notion de revêtement universel, cas des surfaces de Riemann ;
- théorème de Liouville.

**Théorème 1** *Toute fonction entière qui évite au moins deux points est constante.*

*Preuve :* Soient  $a$  et  $b$  distincts tels que  $a, b \notin f(\mathbb{C})$ , et  $X = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ .

Le revêtement universel de  $X$  est  $\mathbb{D}$ , en effet  $X$  n'est pas compact donc  $X$  n'est isomorphe ni à  $\mathbb{S}$ , ni aux tores de genre 1. Reste à voir que  $X$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{C}$  ni à  $\mathbb{C}$  privé d'un point.

Par l'absurde, si  $X$  est isomorphe à l'une de ces deux surfaces alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. Or  $\pi_1(\mathbb{C}) = \{e\}$ ,  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}$  et  $\pi_1(X)$  n'est pas isomorphe à ces deux groupes. Donc le revêtement universel de  $X$  est bien  $\mathbb{D}$ .



Notons  $\tilde{f}$  le relevé de  $f$ , alors  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  est aussi holomorphe. L'application  $\tilde{f}$  est une fonction entière bornée donc, par le théorème de Liouville,  $\tilde{f}$  est constante. Donc  $f$  est constante aussi.  $\square$