Proposition 1 (Inversion de Möbius) *Si* $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, *alors* $f(n) = \sum_{d|n} g(n/d)\mu(d)$.

Proposition 2 *Le nombre de mots de Lyndon* $\lambda(n)$ *vérifie*

$$\lambda(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) 2^{n/d}.$$

Preuve : En effet, on a

$$M_n = \bigsqcup_{d|n} M_{n,d}.$$

où $M_{n,d}$ dénote l'ensemble des mots de taille n et de période stricte d, et où M_n a un sens évident. En considérant les cardinaux, on obtient

$$|M_n| = \sum_{d|n} |M_{n,d}|.$$

Il faut donc évaluer ces cardinaux. Or $M_{n,d} \xrightarrow{\sim} M_{d,d} =< L_d >$. D'où $|M_{n,d}| = d\lambda_d$, puis $2^n = \sum_{d|n} d\lambda_d$, ce qui donne le résultat voulu par inversion de Möbius. $\square$

Lemme 1 (Lemme qui n'est pas de Burnside) *On a, avec les notations classiques de théorie des groupes :*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Proposition 3 *Le nombre d'orbites* $\alpha(n)$ *de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *sous l'action de* $< \sigma_n : i \mapsto i+1 >$ *vérifie*

$$\alpha(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} 2^d \varphi(n/d).$$

Preuve : On applique le lemme qui n'est pas de Burnside à $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et à $G = \{\sigma_n^i, i = 0 \ldots n-1\}$. Ceci donne :

$$\alpha(n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i|n} |X^{\sigma^i}| + \sum_{i \wedge n = 1} 2 + \sum_{\substack{i \wedge n = d \\ d \neq 1, i}} |X^{\sigma^d}| \right).$$

Or $|X^{\sigma^i}| = \sum_{k|i}$ mots strictement k-périodique $= \sum_{k|i} k\lambda(k) = 2^i$ (voir ci-dessus).

Alors,

$$\alpha(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i \wedge n}.$$

Enfin,

$$|\{i \in d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} | \quad i \wedge n = d\}| = |\{i \in d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} | \quad i/d \wedge n/d = 1\}| = |\{j \in \mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z} | \quad j \wedge n/d = 1\}|,$$

ce qui est finalement le cardinal de $(\mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z})^*$, qui est $\varphi(n/d)$. Finalement :

$$\alpha(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} 2^d \varphi(n/d).\square$$