Encadrement de π par des rationnels

Bruno Winckler

29 octobre 2012

Prérequis :
- intégration de base ; savoir que $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + c$;
- division euclidienne des polynômes.

Je propose un encadrement de π par des rationnels particulièrement simple, qui se base sur l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi.$$

Il est étonnant qu'on puisse relier π à une de ses approximations traditionnelles par une bête intégrale de fraction rationnelle. On n'a pas une telle identité pour, disons, $\pi - 3,14$.

Cette égalité est assez facile à établir ; on a en effet

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-(1+x)(1-x)^5 + \frac{(1-x)^4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x,$$

en écrivant que $x^4 = x^4 - 1 + 1 = (x^2-1)(x^2+1) + 1$. Cette technique de simplification est bien évidemment dispensable. Ensuite,

$$\frac{(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}{1+x^2} = \frac{1 + 6x^2 + x^4}{1+x^2} - 4x.$$

La division euclidienne du polynôme X^4+6X^2+1 par X^2+1 donne $\frac{X^4+6X^2+1}{X^2+1} = X^2 + 5 - \frac{4}{X^2+1}$. Bref,

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\underbrace{-(1+x)(1-x)^5}_{=(1-x)^6-2(1-x)^5} - 4x + x^2 + 5 - \frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

Il ne reste plus qu'à intégrer. Cette intégrale égale, en y réfléchissant bien :

$$\left[-\frac{(1-x)^7}{7} + 2\frac{(1-x)^6}{6} - 4\arctan(x)\right]_0^1 + \frac{10}{3} = \frac{1}{7} - \frac{1}{3} - \pi + \frac{10}{3} = \frac{22}{7} - \pi.$$

On pouvait bien sûr, sauvagement, tout développer au numérateur puis faire la division euclidienne dès le début, et intégrer chaque monôme, mais je n'en avais pas le cœur.

Il est trivial que cette intégrale est strictement positive (car l'intégrande l'est), donc $\frac{22}{7} > \pi$. De plus,

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^4(1-x)^4\mathrm{d}x = B(5,5) = \frac{4!4!}{9!} = \frac{1}{630},$$

où $B(p,q)$ désigne la fonction bêta d'Euler, qui vaut $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ pour tous réels p et q plus grands que 0. On pouvait bien sûr faire ce calcul directement en développant et en intégrant chaque monôme, ou encore en intégrant par parties quatre fois et tomber sur $\int_0^1 \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1x^8}{5\cdot6\cdot7\cdot8} = \frac{4!4!}{9!}$. Bref, on obtient $\frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}$, et pour résumer :

$$\frac{1979}{63} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Notons que $\frac{1979}{63} \simeq 3,141269841$, tandis que $\frac{22}{7} \simeq 3,142857149$ et $\pi \simeq 3,141592653$.