ESPACES ETHYLIQUES

M. Hoquet

I.— STRUCTURES TONNELEES.

Définition I-1 : On appelle *tonneau ouvert* tout sous-ensemble convexe, équilibré, absorbant et ouvert d'un espace vectoriel topologique localement compact (e.v.t.l.c.)
Définition I-2 : On appelle *tonneau* tout sous-ensemble convexe, équilibré, absorbant et fermé d'un e.v.t.l.c.
Définition I-3 : On appelle *bonde* la fermeture d'un tonneau.
Définition I-4 : On appelle *espace bondé* un e.v.t.l.c. dans lequel tout tonneau est partout dense.
Définition I-5 : On appelle *espace pinté* un e.v.t.l.c. dans lequel tout tonneau est vide.
Théorème I-1 : Dans un espace bondé, tout tonneau est l'espace lui-même.
Théorème I-2 : Dans un espace pinté, toutes les bondes sont ouvertes, donc vides.
Définition I-6 : On appelle *espace tonnelé* un e.v.t.l.c. dans lequel tout tonneau est voisinage de zéro.

II.— FONCTIONS TITUBANTES.

Définition II-1 : On appelle *titubation* d'une fonction [notation : tit(f)] le cardinal de l'ensemble des tonneaux d'image vide.
Définition II-2 : On appelle *fonction titubante* une fonction qui transforme au moins un tonneau en un tonneau vide.
Théorème II-1 : Pour qu'une fonction soit titubante, il faut et il suffit que sa titubation ne soit pas nulle.
Définition II-3 : On appelle *fonction ivre morte* une fonction dont la titubation est infinie.
Théorème II-2 : Toute fonction d'un espace tonnelé dans un espace pinté est ivre morte.

Il existe des fonctions qui transforment tout tonneau en un tonneau dont la fermeture est ouverte, mais qui ne sont pas ivres mortes.
Ex. : Il n'existe pas de fonctions titubantes (*a fortiori* ivres mortes) d'un espace quelconque dans un espace bondé.

III.— TOPOLOGIE ALCOOLIQUE.

Les fonctions considérées dans la suite seront des fonctions définies sur un espace tonnelé et à valeurs dans ce même espace. Le lecteur vérifiera aisément que la fonction $p(x,y)$, définie par $p(x,y) = tit(x) - tit(y)$ (x et y étant des fonctions

© L'OUVERT n°50 (Avril 1988)

définies précédemment) définit un écart sur l'ensemble de ces fonctions.

La topologie faible associée à cet écart est dite *alcoolique*.

Théorème III-1 : Toute suite de fonctions de titubation strictement croissante converge vers une fonction ivre morte.

Théorème III-2 : Toute famille infinie de fonctions admet au moins un point d'accumulation.

Définition III-1 : Deux fonctions sont dites *également cannées* ou *équicannées* si elle ont même titubation (autrement dit leur écart est nul).

— On vérifiera que c'est une relation d'équivalence, compatible avec la structure d'espace vectoriel. Une classe d'équivalence est appelée *degré alcoolique*. Par abus de langage, on parlera de degré alcoolique d'une fonction.

— L'écart $p(x, y)$ définit sur l'ensemble des degrés alcooliques un autre écart, noté (x, y), dont la restriction à l'ensemble des degrés alcooliques des fonctions non ivres mortes est une distance.

$$A^{\circ} = \{f^{\circ}/f \in \text{ (Et, Et')}; \text{tit}(f) \text{ fini}^{\circ\circ}\} A - \text{éthylique}.$$

Théorème III-3 : Aucune suite de degrés alcooliques strictement croissante ne converge vers un point de A°.

Théorème III-4 : L'ensemble A° est canoniquement isomorphe à N.

IV.— ALCOOTEST

Définition IV-1 : On appelle "*alcootest*" d'une famille de fonctions

$$\text{Alc}(f_i) = \text{Sup}[\text{tit } (f_i)].$$

Théorème IV-1 : On démontre l'inégalité fondamentale suivante :

$$\text{Alc } (f_i) > \text{ tit } [\text{Sup } (f_i)] > \text{ inf } [\text{tit } (f_i)].$$

Indication

L'intersection de deux tonneaux est un tonneau.

Pour plus de détails, voir BOURBAKHIC, livre III, tome 15, chapitre 246,372.

Théorème IV.2 : Toute famille finie d'alcootest infini contient au moins une fonction ivre morte.

Théorème IV-3 : Toute famille dénombrable d'alcootest égale à π_1 contient une infinité dénombrable de fonctions ivres mortes.